

СИНТЕЗ НАДЕЖНЫХ СХЕМ ПРИ ЛИНЕЙНЫХ СЛИПАНИЯХ ПЕРЕМЕННЫХ В БАЗИСЕ «АНТИКОНЪЮНКЦИЯ»¹

Аннотация.

Актуальность и цель. Увеличение сложности современных систем переработки, передачи и хранения информации выдвигает на первый план требование к надежности и контролю различных управляющих и вычислительных систем. В теории надежности и контроля управляющих систем можно выделить три основных направления: 1) построение надежных схем из ненадежных элементов; 2) синтез самокорректирующихся схем; 3) построение тестов для контроля и диагностики схем. Актуальной проблеме построения надежных схем, реализующих булевы функции, при различных неисправностях входов (на входы подаются линейные функции, существенно зависящие от двух переменных) посвящена эта работа. Цель – построить надежные схемы, получить оценки ненадежности этих схем.

Материалы и методы. Используются ранее известные методы синтеза надежных схем и получения оценок ненадежности схем.

Результаты. В каждом из двух случаев неисправностей базисных элементов построены надежные схемы и получены оценки ненадежности схем. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании технических систем для повышения их надежности.

Выводы. Построены надежные схемы относительно линейных слипаний переменных в базисных элементах «антиконъюнкция» в случаях, когда функция слипания существенно зависит от двух переменных.

Ключевые слова: ненадежные функциональные элементы, надежность схемы, ненадежность схемы, неисправности на входах элементов.

М. А. Alekhina

SYNTHESIS OF RELIABLE CIRCUITS AT LINEAR ADHESION OF VARIABLES IN THE “ANTICONJUNCTION” BASIS

Abstract.

Background. The increased complexity of modern systems of information processing, transfer and storage highlights a requirement of reliability and management of various control and computing systems. In the theory of control system reliability and management one can single out three main areas: 1) formation of reliable circuits from unreliable gates; 2) synthesis of self-correcting circuits; 3) formation of tests for circuit checking and diagnosing. The work is devoted to a topical problem of formation of reliable circuits realizing Boolean functions at various failures on inputs (linear functions that considerably depend on two variables are input). The aim of the study is to build reliable circuits and to obtain unreliability estimates for the said circuits.

Materials and methods. The author used previously known methods of reliable circuits synthesis and circuit unreliability estimates obtainment.

Results. For each of two cases of basis gates failures the author built reliable circuits and obtained circuit unreliability estimates. The results obtained may be used in technical system design for reliability improvement.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 14-01-00273.

Conclusions. The author built reliable circuits relative to linear adhesions of variables in “anticonjunction” basis gates in cases, when the adhesion function significantly depends on two variables.

Key words: unreliable functional gates, reliability of circuits, unreliability of circuits, failures on inputs of gates.

Введение

Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных функциональных элементов рассматривал Дж. фон Нейман [1]. Он предполагал, что все базисные элементы подвержены инверсным неисправностям на выходах и переходят в неисправные состояния независимо друг от друга. Задача синтеза надежных схем, реализующих булевы функции, при константных неисправностях одного типа (например, только типа 0 на входах элементов) решена в полных неприводимых базисах из двухвходовых элементов [2], а также в некоторых базисах при неисправностях двух типов [3–5], при константных неисправностях четырех типов на входах и выходах [6]. Отметим также работу [7], в которой решена задача синтеза надежных программ с оператором условной остановки.

В этой работе рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадежных двухвходовых элементов в базисе $\{x | y\}$ (где $x | y = \overline{x \& y}$ – штрих Шеффера или антиконъюнкция) и исследуем модель неисправностей, в которой каждый элемент схемы может быть подвержен так называемым линейным слипаниям переменных, когда на оба входа базисного элемента при наличии неисправности подаются линейные функции: либо константы 0, либо константы 1, либо отрицания переменных, либо сумма по модулю два, либо ее отрицание. Заметим, что поскольку базисный элемент имеет два входа, функция неисправности зависит не более чем от двух переменных.

Слипания переменных исследовались, например, в [8, 9] при построении диагностических тестов, а линейные слипания переменных – в [10, 11] при построении проверяющих тестов.

При синтезе надежных схем ранее были исследованы константные неисправности на входах [2] и инверсные неисправности на входах [12]. В этой статье впервые исследуются неисправности, при наличии которых на оба входа элемента поступают линейные функции, существенно зависящие от двух переменных: $x \oplus y$ или $x \oplus y \oplus 1$.

Будем считать, что схема из ненадежных функциональных элементов реализует функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$), если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}^n = (a_1, \dots, a_n)$ при отсутствии неисправностей в схеме на ее выходе появляется значение $f(\tilde{a}^n)$.

Пусть схема S реализует булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$. Обозначим через $P_{f(\tilde{a}^n)}(S, \tilde{a}^n)$ вероятность появления значения $\overline{f(\tilde{a}^n)}$ на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как

максимальное из чисел $P \frac{\text{---}}{f(\tilde{a}^n)}(S, \tilde{a}^n)$ по всем входным наборам $\tilde{a}^n$ схемы

S , т.е. $P(S) = \max \left\{ P \frac{\text{---}}{f(\tilde{a}^n)}(S, \tilde{a}^n) \right\}$. Надежность схемы S равна $1 - P(S)$.

1. Неисправность с функцией слипания $x \oplus y$

В этом разделе предполагаем, что неисправность базисного элемента такова, что на оба входа базисного элемента с вероятностью $\gamma \in (0; 1/2)$ поступает функция $x \oplus y$, а следовательно, функциональный элемент в неисправном состоянии реализует функцию $x \oplus y \oplus 1$. Кроме того, предполагаем, что в неисправные состояния элементы схемы переходят независимо друг от друга.

Поскольку в неисправном состоянии базисный элемент реализует функцию $x \oplus y \oplus 1$, вероятность ошибки равна γ только на тех наборах, на которых значения функций $\overline{x \& y}$ и $x \oplus y \oplus 1$ отличаются. Поэтому вероятности появления ошибок на выходе базисного элемента E таковы: $P_0(E, (00)) = 0$, $P_0(E, (01)) = \gamma$, $P_0(E, (10)) = \gamma$, $P_1(E, (11)) = \gamma$. Очевидно, что ненадежность $P(E)$ элемента E равна $P(E) = \gamma$.

Известно [13], что при таких неисправностях построить схемы сколь угодно высокой надежности нельзя. Возникает вопрос: какой максимальной надежности можно добиться при синтезе схем в этом случае? Ответ на него получен далее.

Пусть f – произвольная булева функция; S – схема, реализующая функцию f . Возьмем два экземпляра схемы S и соединим их выходы со входами базисного элемента. Построенную схему обозначим $\psi(S)$. Очевидно, что эта схема реализует функцию $\bar{f}$. Возьмем два экземпляра схемы $\psi(S)$ и соединим их выходы со входами еще одного базисного элемента. Полученную схему обозначим $\Psi(S)$. Очевидно, что схема $\Psi(S)$ реализует исходную функцию f .

Теорема 1 [2]. Пусть f – произвольная булева функция, а S – любая схема, реализующая f . Тогда схема $\Psi(S)$ реализует функцию f с ненадежностью

$$P(\Psi(S)) \leq \max \left\{ 2\alpha + \tau + 2(\beta + \delta)P(S) + 2P^2(S), \right. \\ \left. \alpha + (\beta + \delta)(\tau + 2P(S)) + (\tau + 2P(S))^2 \right\},$$

где $P_0(E, (00)) = \alpha$, $P_0(E, (01)) = \beta$, $P_0(E, (10)) = \delta$, $P_1(E, (11)) = \tau$, $P(S)$ – ненадежность схемы S .

Из теоремы 1 следует теорема 2, если вместо $\alpha, \beta, \delta, \tau$ подставить вычисленные выше вероятности ошибок на выходе базисного элемента.

Теорема 2. Пусть f – произвольная булева функция, а S – любая схема, реализующая f . Тогда схема $\Psi(S)$ реализует функцию f с ненадежностью

$$P(\Psi(S)) \leq \max\{\gamma + 4\gamma P(S) + 2P^2(S), 3\gamma^2 + 8\gamma P(S) + 4P^2(S)\},$$

где $P(S)$ – ненадежность схемы S .

Теорема 3 справедлива для произвольных неисправностей элементов.

Теорема 3 [2]. Пусть в произвольном полном конечном базисе схема A реализует функцию $x|y$ и $P(A) \leq \mu$. Тогда любую булеву функцию f в этом базисе можно реализовать такой схемой B , что при всех $\mu \in (0, 1/160]$ верно неравенство: $P(B) \leq 4\mu$.

Применительно к рассматриваемым неисправностям элементов из теоремы 3 получаем теорему 4, если вместо μ подставим γ .

Теорема 4. Любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой B , что при всех $\gamma \in (0, 1/160]$ верно неравенство $P(B) \leq 4\gamma$.

Из теорем 2 и 4 следует теорема 5.

Теорема 5. Любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой B , что при всех $\gamma \in (0, 1/160]$ верно неравенство $P(B) \leq \gamma + 9\gamma^2$.

Доказательство. Пусть f – произвольная булева функция. По теореме 4 функцию f можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \leq 4\gamma$ при всех $\gamma \in (0, 1/160]$. По схеме A построим схему $\Psi(A)$ и оценим ее ненадежность по теореме 2 при $\gamma \in (0, 1/160]$. Получаем неравенство:

$$P(\Psi(A)) \leq \max\{\gamma + 48\gamma^2, 99\gamma^2\} \leq \gamma + 48\gamma^2,$$

поскольку $99\gamma^2 \leq 99\gamma/160 \leq \gamma \leq \gamma + 48\gamma^2$.

По схеме $\Psi(A)$ построим схему $\Psi(\Psi(A))$, которую обозначим через $\Psi^2(A)$. Оценим ее ненадежность, используя теорему 2 и неравенство $\gamma + 48\gamma^2 \leq \gamma + 48\gamma/160 = 1,3\gamma$:

$$\begin{aligned} P(\Psi^2(A)) &\leq \max\{\gamma + 5,2\gamma^2 + 2(1,3\gamma)^2, 3\gamma^2 + 10,4\gamma^2 + 4(1,3\gamma)^2\} = \\ &= \max\{\gamma + 8,58\gamma^2; 30,56\gamma^2\} = \gamma + 8,58\gamma^2, \end{aligned}$$

поскольку $30,56\gamma^2 \leq 30,56\gamma/160 \leq \gamma \leq \gamma + 8,58\gamma^2$.

Схема $\Psi^2(A) = B$ – искомая.

Теорема 5 доказана.

Следствие 1. Любую булеву функцию можно реализовать такой схемой, что ее ненадежность асимптотически не больше, чем γ при $\gamma \rightarrow 0$.

В следующей теореме получена нижняя оценка ненадежности схем.

Теорема 6. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – любая функция, отличная от константы 1 и переменных x_i ($i \in \{1, \dots, n\}$), а S – любая схема, реализующая $f(\tilde{x}^n)$. Тогда при всех $\gamma \in (0, 1/2)$ верно неравенство $P(S) \geq \gamma$.

Для доказательства достаточно выделить элемент, содержащий выход схемы S и вычислить вероятность ошибки на нулевом входном наборе схемы S .

Из теоремы 6 следует, что любую функцию, отличную от переменной и константы 1, нельзя реализовать схемой, ненадежность которой меньше γ .

Таким образом, по следствию 1 и теореме 6 получаем следующий результат: любую булеву функцию, отличную от переменной и константы 1, можно реализовать такой схемой, что ее ненадежность асимптотически (при $\gamma \rightarrow 0$) равна γ , причем эту оценку ненадежности схем нельзя понизить.

2. Неисправность с функцией слипания $x \oplus y \oplus 1$

В этом разделе предполагаем, что неисправность базисного элемента такова, что на оба входа базисного элемента с вероятностью $\gamma \in (0; 1/2)$ поступает функция $x \oplus y \oplus 1$, а следовательно, функциональный элемент в неисправном состоянии реализует функцию $x \oplus y$. Кроме того, как и в предыдущем разделе, предполагаем, что в неисправные состояния элементы схемы переходят независимо друг от друга.

Поскольку в неисправном состоянии базисный элемент реализует функцию $x \oplus y$, вероятность ошибки равна γ только на тех наборах, на которых значения функций $\overline{x \& y}$ и $x \oplus y$ отличаются. Поэтому вероятности появления ошибок на выходе базисного элемента E таковы: $P_0(E, (00)) = \gamma$, $P_0(E, (01)) = P_0(E, (10)) = 0$, $P_1(E, (11)) = 0$. Очевидно, что ненадежность $P(E)$ элемента E равна $P(E) = \gamma$.

Известно [13], что при таких неисправностях так же, как и в предыдущем разделе, построить схемы сколь угодно высокой надежности нельзя. Ответ на вопрос, какой максимальной надежности можно добиться при синтезе схем в этом случае, получен далее.

Пусть f – произвольная булева функция; S – схема, реализующая функцию f . Возьмем четыре экземпляра схемы S , три базисных элемента и построим схему $\Psi(S)$ (также как и в предыдущем разделе), реализующую функцию f . Из теоремы 1, подставляя вместо $\alpha, \beta, \delta, \tau$ вычисленные выше вероятности ошибок на выходе базисного элемента, получаем теорему 7.

Теорема 7. Пусть f – произвольная булева функция, а S – любая схема, реализующая f . Тогда схема $\Psi(S)$ реализует функцию f с ненадежностью

$$P(\Psi(S)) \leq \max \{2\gamma + 2P^2(S), \gamma + 4P^2(S)\},$$

где $P(S)$ – ненадежность схемы S .

Заметим, что и при этих неисправностях справедлива теорема 4, полученная ранее. Из теорем 4 и 7 следует теорема 8.

Теорема 8. Любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой B , что при всех $\gamma \in (0, 1/160]$ верно неравенство $P(B) \leq 2\gamma + 10\gamma^2$.

Доказательство. Пусть f – произвольная булева функция. По теореме 4 функцию f можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \leq 4\gamma$ при всех $\gamma \in (0, 1/160]$. По схеме A построим схему $\Psi(A)$ и оценим ее ненадежность по теореме 7 при $\gamma \in (0, 1/160]$. Получаем неравенство:

$$P(\Psi(A)) \leq \max\{2\gamma + 32\gamma^2, \gamma + 64\gamma^2\} \leq 2\gamma + 32\gamma^2,$$

поскольку $\gamma + 64\gamma^2 \leq \gamma + 64\gamma/160 \leq 2\gamma \leq 2\gamma + 32\gamma^2$.

По схеме $\Psi(A)$ построим схему $\Psi(\Psi(A)) = \Psi^2(A)$. Оценим ее ненадежность, используя теорему 7 и неравенство $2\gamma + 32\gamma^2 \leq 2\gamma + 32\gamma/160 = 2,2\gamma$:

$$P(\Psi^2(A)) \leq \max\{2\gamma + 2(2,2\gamma)^2, \gamma + 4(2,2\gamma)^2\} = 2\gamma + 9,68\gamma^2,$$

поскольку $\gamma + 19,36\gamma^2 \leq \gamma + 19,36\gamma/160 \leq 2\gamma \leq 2\gamma + 9,68\gamma^2$.

Схема $\Psi^2(A) = B$ – искомая.

Теорема 8 доказана.

Следствие 2. Любую булеву функцию можно реализовать такой схемой, что ее ненадежность асимптотически не больше, чем 2γ при $\gamma \rightarrow 0$.

Заключение

Построены надежные схемы относительно линейных слипаний переменных в базисных элементах $x|y$ в двух случаях, когда функция слипания есть $x \oplus y$ или $x \oplus y \oplus 1$.

Список литературы

1. Neuman, von J. Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components / J. von Neuman // Automata studies / ed. by C. Shannon, J. Mc Carthy. – Princeton University Press, 1956. – P. 43–98.
2. Алехина, М. А. Синтез, надежность и сложность схем из ненадежных функциональных элементов : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Алехина М. А. – Пенза, 2004. – 169 с.
3. Алехина, М. А. О ненадежности схем из функциональных элементов, подверженных двум типам неисправностей / М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 3 (27). – С. 31–47.
4. Alekhina, M. A. The Reliability of Circuits in the Basis Anticonjunction with Constant Faults of Gates / M. A. Alekhina, O. Yu. Barsukova // Computer Science and Information Technology. – 2014. – Vol. 2 (1). – P. 51–54.
5. Алехина, М. А. О надежности схем в базисе «антиконъюнкция» при константных неисправностях на входах элементов / М. А. Алехина, В. В. Курышева // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2016. – № 7. – С. 1–7.
6. Алехина, М. А. Синтез надежных схем при константных неисправностях на входах и выходах элементов / М. А. Алехина // Известия высших учебных заведе-

- ний. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 2 (34). – С. 5–15.
7. **Алехина, М. А.** О надежности неветвящихся программ в произвольном полном конечном базисе / М. А. Алехина, С. М. Грабовская // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2012. – № 2. – С. 13–22.
 8. **Романов, Д. С.** О диагностических тестах относительно локальных слипаний переменных в булевых функциях / Д. С. Романов // Прикладная математика и информатика. – 2010. – Т. 36. – С. 91.
 9. **Romanov, D. S.** Diagnostic tests for local coalescences of variables in Boolean functions / D. S. Romanov // Computational Mathematics and Modeling. – 2012. – Т. 23. – С. 72–78.
 10. **Морозов, Е. В.** Проверяющие тесты для булевых функций при линейных локальных неисправностях входов схем / Е. В. Морозов, Д. С. Романов // Дискретный анализ и исследование операций. – 2015. – Т. 22, № 1. – С. 49–61.
 11. **Морозов, Е. В.** О проверяющих тестах относительно множественных линейных слипаний переменных / Е. В. Морозов, Д. С. Романов // Дискретная математика и ее приложения : материалы XI Междунар. семинара, посвящ. 80-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 18–23 июня 2012 г.). – М. : Изд-во механико-математического фак-та МГУ, 2012. – С. 144–147.
 12. **Алехина, М. А.** О надежности и сложности схем в базисе $\{x|y\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов / М. А. Алехина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Сер. Естественные науки. – 2005. – № 6. – С. 36–41.
 13. **Тарасов, В. В.** К синтезу надежных схем из ненадежных элементов / В. В. Тарасов // Математические заметки. – 1976. – Т. 20, № 3. – С. 391–400.

References

1. Neuman von J. *Automata studies*. Princeton University Press, 1956, pp. 43–98.
2. Alekhina M. A. *Sintez, nadezhnost' i slozhnost' skhem iz nenadezhnykh funktsional'nykh elementov: dis. dokt. fiz.-mat. nauk* [Synthesis, reliability and complexity of circuits made of unreliable functional gates: dissertation to apply for the degree of the doctor of physical and mathematical sciences]. Penza, 2004, 169 p.
3. Alekhina M. A., Barsukova O. Yu. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2013, no. 3 (27), pp. 31–47.
4. Alekhina M. A., Barsukova O. Yu. *Computer Science and Information Technology*. 2014, vol. 2 (1), pp. 51–54.
5. Alekhina M. A., Kuryshcheva V. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 2016, no. 7, pp. 1–7.
6. Alekhina M. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2015, no. 2 (34), pp. 5–15.
7. Alekhina M. A., Grabovskaya S. M. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 2012, no. 2, pp. 13–22.
8. Romanov D. S. *Prikladnaya matematika i informatika* [Applied mathematics and informatics]. 2010, vol. 36, p. 91.
9. Romanov D. S. *Computational Mathematics and Modeling*. 2012, vol. 23, pp. 72–78.
10. Morozov E. V., Romanov D. S. *Diskretnyy analiz i issledovanie operatsiy* [Discrete analysis and research of operations]. 2015, vol. 22, no. 1, pp. 49–61.
11. Morozov E. V., Romanov D. S. *Diskretnaya matematika i ee prilozheniya: materialy XI Mezhdunar. seminar, posvyashch. 80-letiyu so dnya rozhdeniya akademika O. B. Lu-*

panova (Moskva, MGU, 18–23 iyunya 2012 g.) [Discrete mathematics and its applications: proceedings of XI International seminar commemorating 80th jubilee of academician O.V. Lyupanov (Moscow, MSU, 18–23 June 2012)]. Moscow: Izd-vo mekhaniko-matematicheskogo fak-ta MGU, 2012, pp. 144–147.

12. Alekhina M. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Ser. Estestvennye nauki* [University proceedings. Volga region. Ser. Natural sciences]. 2005, no. 6, pp. 36–41.
13. Tarasov V. V. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 1976, vol. 20, no. 3, pp. 391–400.

Алехина Марина Анатольевна

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующая кафедрой
математики, Пензенский
государственный технологический
университет (Россия, г. Пенза, проезд
Байдукова/улица Гагарина, д. 1а/11)

E-mail: ama@sura.ru

Alekhina Marina Anatol'evna

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of mathematics, Penza State Technological
University (1a/11 Baydukova lane/Gagarina
street, Penza, Russia)

УДК 519.718

Алехина, М. А.

Синтез надежных схем при линейных слияниях переменных в базе «антиконъюнкция» / М. А. Алехина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 1 (37). – С. 63–70.